Concursul interjudeţean de matematică Victor Vâlcovici

Brăila, 20 Mai 2017

Clasa a 9-a - BAREM

Problema 1. (a) Determinaţi $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care:

$$3(x^4 - 3x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14) \leq (x + x^2 + y - 6)^2.$$

Adela Dimov, Brăila

Soluţie:

$3(x^4 - 3x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14) \leq (x + x^2 + y - 6)^2 \Leftrightarrow 3(x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9) \leq (x^2 - 2 + x - 1 + y - 3)^2$.

Notând cu $a = x^2 - 2, b = x - 1, c = y - 3$ avem $3(a^2 + b^2 + c^2) \leq (a + b + c)^2$. **(1p)**

$3\sum a^2 \leq \sum a^2 + 2\sum ab \Leftrightarrow 2\sum a^2 - 2\sum ab \leq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 0$.
Atunci $a = b = c$. **(1p)**

Dar $a = x^2 - 2 = b = x - 1$, deci $x^2 - x - 1 = 0$, deci $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Cum $b = c$, $y = x + 2$, deci $y = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ şi $S = \{(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}), (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2})\}$. **(1p)**

(b) Fie numerele reale $a, b, c > 0$. Demonstraţi că:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}.$$

Cristi Săvescu, Bucureşti

Soluţie:

Observaţia principală este că $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{4}((a+b) - \frac{(a-b)^2}{a+b}) \leq \frac{1}{4}((a+b) - \frac{(a-b)^2}{a+b+c})$.**(3p)**
Sumând, obţinem $\sum \frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b+c}{2} - \frac{2\sum a^2 - 2\sum ab}{4(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)^2 - \sum a^2 + \sum ab}{2(a+b+c)} = \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}$.
Evident, egalitatea este pentru $a = b = c$. **(1p)**

Problema 2. Să se arate că dacă un triunghi are lungimile laturilor în progresie aritmetică şi măsurile unghiurilor în progresie aritmetică atunci acesta este echilateral.

Marius Mohonea, Focşani

Soluţie:

Cu notaţiile uzuale presupunem $a \leq b \leq c$ şi deci $A \leq B \leq C$. **(1p)**

Din $A + C = 2B$ avem $B = 60^0$. **(1p)**

Din teorema sinusurilor, ţinând cont că $a + c = 2b$, avem $sinA + sinC = 2sinB$. **(2p)**

Atunci $2sin\frac{A+C}{2}cos\frac{A-C}{2} = 2sinB$, deci $cos\frac{A-C}{2} = cos\frac{C-A}{2} = 1$.**(2p)**

Cum $0 \leq \frac{C-A}{2} < 60^0$ atunci $A = C$, de unde concluzia. **(1p)**

Problema 3. Considerăm triunghiul ABC care are centrul de greutate G şi centrul cercului circumscris în O. Dreptele AG, BG şi CG intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctele D, E, respectiv F. Fie L centrul de greutate al triunghiului DEF.

(a) Dacă notăm cu M, N, P, Q mijloacele segmentelor AD, BE, CF respectiv GL, demonstraţi că Q este centrul de greutate al triunghiului MNP.
(b) Demonstraţi că $GL \leq 2GO$.

Cristi Săvescu, Bucureşti

Soluţie:

(a) $\sum \overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}\sum \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QD} = \frac{1}{2}\sum \overrightarrow{QA} + \frac{1}{2}\sum \overrightarrow{QD} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{QL}) = 0$. **(3p)**

(b) Pentru că M, N, P sunt mijloacele segmentelor AD, BE, CF, atunci $OM \perp AD$ şi analoagele, deci M, N, P sunt dispuse pe cercul de diametru OG. **(2p)**
Atunci Q, centrul de greutate al triunghiului MNP este în interiorul triunghiului MNP, deci şi în interiorul acestui cerc. **(1p)**
Atunci GQ este cel mult diametrul, deci $GQ \leq OG$, de unde concluzia. **(1p)**

Observaţie: Egalitatea are loc când Q se află pe cercul circumscris ΔMNP, dar cum acesta îi este şi centru de greutate atunci acest triunghi se reduce la un punct. Astfel, AD, BE, CF sunt concurente, deci sunt concurente în $O = G$. Atunci ΔABC echilateral. Reciproca este clar adevărată.